

Uniwersytet Mikołaja Kopernika
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
Centrum Astronomiczne

Piotr Różański
nr albumu: 217724

Praca licencjacka
na kierunku astronomia

Astrometryczny model układu
planetarnego
z dokładnością mikrosekundową

Opiekun pracy dyplomowej
dr hab. Krzysztof Goździewski
Centrum Astronomiczne UMK

Toruń 2009

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika zastrzega sobie prawo własności niniejszej pracy
licencjackiej w celu udostępniania dla potrzeb działalności naukowo-badawczej lub
dydaktycznej.*

*serdecznie dziękuję opiekunowi pracy
dr hab. Krzysztofowi Goździewskiemu
za wyrozumiałość i okazaną pomoc*

Spis treści

1	Wstęp	5
1.1	Opis oznaczeń	6
1.2	Metody poszukiwania planet pozasłonecznych	7
1.2.1	Chronometraż pulsarów	7
1.2.2	Analiza prędkości radialnych	7
1.2.3	Analiza pomiarów astrometrycznych	8
1.3	Motywacje na rzecz astrometrii	8
2	Astrometryczna metoda poszukiwania planet	10
2.1	Ruch izolowanego układu gwiazdy i planet	11
2.2	Precyzja astrometryczna a wykrywalność planet	13
2.3	Wybór układu współrzędnych	13
2.4	Wybór skali czasu	15
3	Redukcja astrometryczna	17
3.1	Refrakcja atmosferyczna	17
3.2	Aberracja światła	19
3.2.1	Aberracja w astrometrii względnej	21
3.3	Grawitacyjne ugięcie światła	23
3.3.1	Aberracja planetarna	27
3.4	Paralaksa heliocentryczna i ruch własny	28
4	Astrometryczny model układu planetarnego	29
4.1	Ruch gwiazdy w ujęciu wektorowym	29
4.1.1	Prędkość radialna a prędkość tangencjalna	31
4.2	Modelowanie danych na podstawie parametrów	32
4.3	Dopasowanie modelu do obserwacji	33
5	Podsumowanie	35

Rozdział 1

Wstęp

Praca niniejsza stanowi próbę przedstawienia jednolitego modelu układu planetarnego, dzięki któremu możliwe byłoby wykrywanie oraz wyznaczanie orbit ewentualnych planet na podstawie precyzyjnych astrometrycznych pomiarów zmian pozycji gwiazdy. Problem ten od ostatnich lat nabiera coraz większego znaczenia w kontekście bardzo obiecujących perspektyw wynikających z aktualnych i planowanych projektów obserwacyjnych. Poruszona tu tematyka obejmuje zarówno redukcję astrometryczną pomiarów na poziomie $1 \mu\text{as}$, jak i proces modelowania ruchu gwiazdy w celu dopasowania go do obserwacji. Opisana metoda jest dość uniwersalna, acz w szczególnym stopniu dostosowana jest do względnych obserwacji astrometrycznych, przewidzianych m. in. w projektach radio-interferometrycznych. Rozważania i formuły nakierowane są na rozwiązania numeryczne, zatem w znacznej większości zaprezentowano tutaj rozwiązania dokładne, nawet jeśli możliwe było tylko przedstawienie ich w postaci zależności uwikłanych.

Myślą przewodnią była chęć dokładnego przedstawienia problemów teoretycznych oraz różnego rodzaju efektów, które brać należy pod uwagę w kontekście astrometrii mikrosekundowej. W związku z tym, praca skupia się głównie na zagadnieniach teoretycznych, zaś kwestie czysto techniczne, związane z budową w pełni działającego systemu komputerowego do analizy obserwacji astrometrycznych, wykraczają poza jej ramy. Wiele z tych zagadnień pojawia się bowiem w różnych zastosowaniach astronomicznych, więc w przypadku względnie nowej techniki obserwacyjnej, jaką jest precyzyjna astrometria, ich wyczerpujące opracowanie ma znaczenie raczej drugorzędne.

1.1 Opis oznaczeń

Wszystkie skalarne wielkości fizyczne oznaczane są kursywą, np. t , M . Wielkości fizyczne wektorowe oznaczane są poprzez dodanie symbolu strzałki nad literą, np. $\vec{r}$. Wielkości macierzowe oznaczane są czcionką półgrubą, np. $\mathbf{R}_x$.

Położenie obserwatora oznaczane jest zwykle symbolem $\vec{x}$, w odróżnieniu od położeń innych ciał, oznaczanych symbolem $\vec{r}$ z odpowiednim indeksem. Wektory kierunkowe¹, wyznaczające położenia na sferze niebieskiej, oznaczane są zazwyczaj symbolem $\vec{s}$. Wersory wskazujące osie układu współrzędnych oznaczane są symbolami $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$. Symbol w oznacza zwykle potencjał pola grawitacyjnego.

Wielkość oznaczona symbolem Γ jest bezwymiarowym parametrem wyznaczającym odstępstwa od Ogólnej Teorii Względności (OTW) i została zapożyczona z pracy [7] (gdzie oznaczana jest jako γ). W przypadku pełnej zgodności z teorią, parametr ten ma wartość 1. Dzięki wprowadzeniu tego parametru, zgodność z OTW może być zweryfikowana doświadczalnie w obserwacjach astrometrycznych, a jednocześnie, w przypadku wykrycia jakichkolwiek niezgodności, model astrometryczny może być w prosty sposób dopasowany.

Macierze oznaczane symbolem $\mathbf{R}$ z indeksami x , y , z oznaczają macierze obrotu wokół odpowiednich osi w przestrzeni trójwymiarowej i wyrażają się jako:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_x(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_y(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_z(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Oznaczenie $O(\mathcal{F})$ stosowane jest w niniejszej pracy jako określenie dokładności formuł. Jeśli, przykładowo, wskazane jest, że dla danej funkcji $\mathcal{F}(x)$

$$y(x) = z(x) + O(\mathcal{F}) \quad ,\tag{1.2}$$

to istnieje taka stała $c \in \mathbb{R}_+$, że dla dowolnego $x \in D_y$, $|y(x) - z(x)| \leq c \cdot \mathcal{F}(x)$.

¹wektory o długości jednostkowej, zwane też wersorami

1.2 Metody poszukiwania planet pozasłonecznych

Od czasu odkrycia w 1992 roku pierwszego pozasłonecznego układu planetarnego PSR 1257+12, do poszukiwania planet pozasłonecznych wykorzystywano różne metody. Każda z tych metod posiada zarówno określone zalety, jak i wady, określając tym samym kategorię układów planetarnych, które mogą zostać dzięki niej zaobserwowane. Poniżej przedstawione zostanie kilka głównych metod wraz z ich krótką charakterystyką, w tym także metoda astrometryczna, której szczegóły zostaną przybliżone w kolejnych rozdziałach.

1.2.1 Chronometraż pulsarów

Silne pole magnetyczne pulsarów w połączeniu z bardzo szybką rotacją tych gwiazd powoduje, że przy odpowiednim ustawieniu osi obrotu pulsara względem obserwatora, odbiera on w bardzo dokładnych odstępach czasu błyski promieniowania radiowego. Jeśli gwiazda posiada układ planetarny, wykonuje ona niewielkie ruchy wokół środka masy całego układu, symetryczne do ruchów planet, a jedynie w odpowiednio mniejszej skali. Ruchy takie zaburzają regularność wysyłanych sygnałów, a precyzyjna analiza nieregularności pozwala na wyznaczenie parametrów krążących wokół pulsara planet.

Dokładność współczesnych metod pomiaru czasu przychodzących sygnałów pozwalają na wykrywanie tą metodą planet nawet o niewielkich masach. Jest to istotną zaletą tej metody, w porównaniu do innych metod o znacznie mniejszej precyzji. Niestety, pulsary stanowią znikomą część obserwowanych gwiazd, wobec czego liczba układów planetarnych odkrytych tą metodą jest stosunkowo niewielka.

1.2.2 Analiza prędkości radialnych

Nieregularności w sygnałach pulsarów nie są jedynym efektem ruchu gwiazdy spowodowanego obecnością planet. Ruch taki można stwierdzić także w przypadku gwiazd innych typów na podstawie analizy ich widma. Z każdą z obecnych w widmie gwiazdy linii stowarzyszona jest określona długość fali, którą z dużą precyzją można wyznaczyć w warunkach laboratoryjnych lub też przewidzieć na gruncie teoretycznym. Linie w widmie gwiazdy poruszającej się względem obserwatora są przesunięte zgodnie z efektem Dopplera. Mierząc przesunięcia wielu znanych linii, można z dużą dokładnością wyznaczyć prędkość radialną² gwiazdy w chwili obserwacji, zaś analizując zmiany

²prędkość radialna - składowa prędkości równoległa do kierunku do gwiazdy

tej prędkości zdecydować o istnieniu planet obiegających gwiazdę i ewentualnie wyznaczyć ich parametry.

Metoda prędkości radialnych jest obecnie jedną z wiodących metod wykrywania planet pozasłonecznych. Sukces tej metody uwarunkowany jest przede wszystkim wysoką dokładnością współczesnych pomiarów spektroskopowych. Aby utrzymać odpowiednią dokładność, gwiazda musi być odpowiednio jasna, a poza tym, linie w jej widmie nie powinny być „rozmyte”, a więc w praktyce podzbiór gwiazd obserwowalnych tą metodą zawęża się do karłów typu widmowego F i późniejszych. Do wad tej metody należy zaliczyć również to, że rozwiązania otrzymane dla danego układu na drodze modelowania często bywają niejednoznaczne.

1.2.3 Analiza pomiarów astrometrycznych

Astrometryczna metoda detekcji planet polega na bezpośrednim obserwowaniu przesunięć gwiazdy wywołanych obecnością planet. Ponieważ masa planet jest zwykle dużo mniejsza od masy gwiazdy, a odległości do gwiazd są duże w porównaniu z amplitudą ich ruchów, mierzone przesunięcia kątowe gwiazd są bardzo nieznaczne i do ich zaobserwowania wymagana jest wysoka dokładność pomiarów astrometrycznych. Niewątpliwą zaletą tej metody jest uniwersalny, niezależny od typu widmowego gwiazdy przebieg analizy pomiarów, dzięki czemu ewentualna automatyzacja procesu badań jest łatwiejsza do zaprojektowania niż w przypadku innych metod. Same pomiary natomiast mogą być wykonywane przy pomocy różnych technik obserwacyjnych: obrazowania, klasycznych pomiarów astrometrycznych (różnicowych), czy nawet interferometrii, zarówno wizualnej jak i radiowej. Praca [16] stanowi wyczerpujące opracowanie na temat stanu zaawansowania współczesnej astrometrii precyzyjnej, możliwości oferowanych przez tą metodę oraz stojących przed nią trudności.

Jednoczesne wykorzystanie pomiarów astrometrycznych i pomiarów prędkości radialnych umożliwiłoby bardziej efektywne wyznaczanie mas i orbit składników postulowanych układów. Na zagadnieniu tym oparta została publikacja [18], jednak zastosowane tam podejście jest zbyt uproszczone, przez co problem ten pozostaje wciąż otwarty. Problem ten poruszony został także we wspomnianej już pracy [16]. W niniejszej pracy brana będzie pod uwagę wyłącznie analiza pomiarów astrometrycznych.

1.3 Motywacje na rzecz astrometrii

Znaczny rozwój technologii pomiarów astrometrycznych w ostatnich latach skierował na tą dziedzinę badań uwagę entuzjastów poszukiwania planet pozasłonecznych. Do-

kładność dostępnych obecnie technik pomiarowych w większości przypadków spełnia już wymagania warunkujące możliwość detekcji nieodkrytych dotąd pozasłonecznych układów planetarnych. Największe szanse wiąże się z misjami kosmicznymi, których głównym celem jest wykonanie masowej, seryjnej astrometrii o wysokiej dokładności. Pierwsza z owych misji, SIM (*Space Interferometry Mission*), której założenia opisano w [14], planowana była początkowo na rok 2005. Pomiary wykonane przez zestaw teleskopów umieszczony w przestrzeni kosmicznej, wykorzystujący technikę interferometrii optycznej, miały osiągnąć dokładność rzędu $1 \mu\text{as}$. Niestety, start misji był kilkakrotnie odraczany z powodów cięć finansowych i obecnie wiadomo tylko, że wystartuje ona nie wcześniej niż w 2015 roku.

Druga z planowanych misji, *Gaia* pod nadzorem European Space Agency, której obszerny opis znajduje się w [11], ma jako jeden z wyznaczonych celów, obok spektroskopii i fotometrii, wykonanie masowych obserwacji astrometrycznych. Dla najjaśniejszych gwiazd precyzja pomiarów astrometrycznych ma osiągnąć $7 \mu\text{as}$, zaś dla najsłabszych ok. 0.3 mas . Start misji planowany jest obecnie na 2012 rok.

Mimo iż dane pomiarowe o precyzji mikrosekundowej nie są jeszcze dostępne, zdążyła już powstać pewna liczba publikacji wykorzystujących do detekcji planet pomiary astrometryczne oparte o technikę interferometrii wielkobazowej. I tak, w [6] opisano odkrycie małomasywnego składnika orbitującego wokół gwiazdy AB Doradus. Odkrycie było wynikiem analizy wyników pomiarów z VLBI i satelity Hipparcos. Z kolei w [13] wskazano na możliwość istnienia planety wokół gwiazdy późnego typu, również na podstawie obserwacji astrometrycznych.

Jak się okazuje, nawet w przypadku nieco niższej precyzji pomiarów astrometrycznych, jest wciąż możliwa detekcja i modelowanie określonych kategorii układów planetarnych. Za przykład służyć może projekt radiointerferometryczny RISARD (*Radio-Interferometric Survey of Active Red Dwarfs*) [3], w którym planowana jest analiza pomiarów astrometrycznych o dokładności rzędu 0.1 mas . Pomimo iż pomiary dokonywane są z powierzchni Ziemi, precyzja taka może być osiągnięta dzięki odpowiedniej kalibracji oraz wykorzystaniu astrometrii względnej. Innym, zbliżonym pod względem założeniem projektem jest RIPL, którego zarys zaproponowany został w [1], również z wykorzystaniem techniki interferometrycznej. Celem przyświecającym niniejszej pracy było stworzenie modelu uniwersalnego, lecz ukierunkowanego na opracowanie pomiarów pochodzących właśnie z tego rodzaju projektów.

Rozdział 2

Astrometryczna metoda poszukiwania planet

Analogicznie do innych metod poszukiwania planet, istotą metody astrometrycznej jest wyznaczenie, dla każdej hipotetycznej planety, zestawu parametrów definiujących jej orbitę. Požadany zestaw parametrów charakteryzuje się tym, że różnice pomiędzy obserwowanymi położeniami gwiazdy a obliczonymi na podstawie modelu są jak najmniejsze. Aby znalezienie odpowiednich parametrów było możliwe, obserwacje muszą być uprzednio skalibrowane, uwolnione od efektów instrumentalnych, a także od wpływu: otoczenia, położenia i ruchu samego obserwatora. W związku z tym, konieczne jest wykonanie odpowiedniej redukcji astrometrycznej, tak, aby sprowadzić wszystkie wyniki pomiarów do tego samego, ustalonego układu odniesienia, na przykład związanego z barycentrum Układu Słonecznego. Po wykonaniu redukcji danych, mogą one posłużyć do wyznaczenia parametrów orbitalnych planet. Jak się okaże, przeprowadzenie pełnej redukcji w standardowy sposób nie będzie możliwe, a część czynności redukcyjnych będzie wykonywana na następnym etapie, podczas modelowania rozwiązań układu planetarnego.

Ilościowa weryfikacja zgodności jednego, wybranego zestawu parametrów z danymi obserwacyjnymi jest dość prosta i może być przeprowadzona na gruncie podstawowej analizy statystycznej. Należy w tym celu wyznaczyć, dla każdego punktu pomiarowego, astrometryczne położenie gwiazdy wynikające wprost z przyjętych parametrów, po czym zbadać, przy użyciu odpowiedniej metody statystycznej, zgodność obu serii pomiarowych: obserwacyjnej i syntetycznej (w praktyce, przy najbardziej „typowych” zastosowaniach, metodę taką stanowi metoda Gaussa rachunku najmniejszych kwadratów). Wynikiem takiego postępowania jest ilościowa ocena zgodności wybranego zestawu parametrów ze zbiorem danych astrometrycznych.

Ponieważ parametry optymalne nie znane *a priori*, w celu ich wyznaczenia należy przeszukać całą przestrzeń możliwych parametrów. Badając poszczególne elementy tej przestrzeni przy pomocy opisanej wyżej metody, można w łatwy sposób porównywać ze sobą różne zestawy parametrów pod względem zgodności dopasowania, można więc także odnaleźć taki zestaw, który najlepiej ze wszystkich odpowiadać będzie danym obserwacyjnym. Jak się okaże, problem ten sformułować można w postaci poszukiwania minimum funkcji wielu zmiennych. Znalezione na drodze przeszukiwania parametry odpowiadać będą orbitom planet najlepiej pasującym do danych obserwacyjnych.

Otrzymane rozwiązanie jest dopasowane pod kątem zgodności z obserwacjami, ale nie gwarantuje to, że wymodelowany układ jest na tyle stabilny, aby istnieć w rzeczywistości. Dla przykładu, układ w którym orbity planet przecinają się, z reguły nie jest stabilny, a mimo to, może zostać wybrany przez algorytm jako najlepsze dopasowanie. W związku z tym, ostatnim etapem modelowania powinna być analiza stabilności układu, lub też, alternatywnie, już na etapie modelowania powinny być narzucone więzy stabilności (zagadnieniu temu poświęcona jest praca [4]). Z uwagi na charakter niniejszej pracy, problem stabilności znajdowanych rozwiązań nie będzie poruszany.

2.1 Ruch izolowanego układu gwiazdy i planet

Rozpatrzmy przypadek układu N planet o masach $m_1, m_2 \dots m_N$ krążących po orbitach wokół gwiazdy o masie M . Załóżmy, że planety nie oddziałują wzajemnie ze sobą, a „z punktu widzenia” dowolnie wybranej planety, ruch gwiazdy powodowany obecnością pozostałych jest zanedbywalny. Zatem, każda z planet poruszać się będzie wokół środka masy układu po stałej orbicie eliptycznej niepodlegającej perturbacjom. Założenie powyższe jest dobre, jeśli czas trwania misji obserwacyjnej jest dużo mniejszy od skali czasowej ewentualnych zmian parametrów orbit w takim stopniu, by mogły być one dostrzeżone przy danej precyzji obserwacyjnej. Oczywiście, dla niektórych układów planetarnych, w których masa planet nie jest zanedbywalna w stosunku do masy gwiazdy centralnej, lub występują silne rezonanse ruchów średnich niskiego rzędu pomiędzy orbitami planet, założenie takie może nie być właściwe.

Położenie każdej z planet ($i = 1 \dots N$) względem barycentrum można wyrazić za pomocą zestawu elementów orbitalnych: a , T (okres orbitalny), e (mimośród orbity), i (nachylenie orbity do ustalonej płaszczyzny), t_p (czas przejścia przez perycentrum¹), Ω

¹perycentrum - punkt na orbicie położony najbliżej ogniska orbity

(długość węzła wstępującego), ω (długość perycentrum) jako

$$\vec{r}_i(t) = \mathbf{R}_z(-\Omega_i) \cdot \mathbf{R}_x(-i_i) \cdot \mathbf{R}_z(\Omega_i - \omega_i) \cdot \begin{pmatrix} a_i[\cos E_i(t) - e_i] \\ a_i\sqrt{1 - e_i^2} \sin E_i(t) \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (2.1)$$

przy czym funkcja $E_i(t)$ wyznacza tzw. anomalie ekscentryczną i związana jest z czasem t poprzez tzw. równanie Keplera:

$$E_i(t) - e_i \sin E_i(t) = \frac{2\pi}{T_i}(t - t_{p_i}) . \quad (2.2)$$

Przy oznaczeniach takich jak powyżej, jeśli tylko układ planetarny uważamy za izolowany, to korzystając z definicji środka masy otrzymujemy wyrażenie na położenie gwiazdy względem barycentrum układu, oznaczane tutaj jako

$$\vec{\varepsilon}(t) = -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i(t) . \quad (2.3)$$

Równanie w powyższej postaci posiada dużą liczbę wzajemnie skorelowanych parametrów, takich jak m_i , M oraz a_i , których nie będzie można wyznaczyć niezależnie z obserwacji. Należy więc w tym momencie wprowadzić, zamiast pól orbit planetarnych a_i , pól „gwiazdowe”, odpowiadające amplitudom ruchu gwiazdy wokół barycentrum. Oznaczając $\hat{a}_i = \frac{m_i}{M} a_i$, otrzymujemy

$$\vec{\varepsilon}(t) = -\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_z(-\Omega_i) \cdot \mathbf{R}_x(-i_i) \cdot \mathbf{R}_z(\Omega_i - \omega_i) \cdot \begin{pmatrix} \hat{a}_i[\cos E_i(t) - e_i] \\ \hat{a}_i\sqrt{1 - e_i^2} \sin E_i(t) \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (2.4)$$

Jeśli parametry powyższej funkcji (w szczególności T_i oraz $\hat{a}_i$) są znane, do wyznaczenia mas i rzeczywistych pól orbit planet wymagana jest dodatkowa informacja na temat masy samej gwiazdy. Jeśli taka informacja jest dostępna, można wykorzystać III prawo Keplera:

$$a_i^3 = \frac{GM^3}{4\pi^2(M + m_i)^2} T_i^2 , \quad (2.5)$$

które po podstawieniu $m = M \frac{\hat{a}_i}{a_i}$ można wyrazić jako

$$a_i = \sqrt[3]{\frac{GMT_i^2}{4\pi^2} - a_i \hat{a}_i (2a_i + \hat{a}_i)} , \quad (2.6)$$

dzięki czemu możliwe jest znalezienie rozwiązania metodą iteracyjną, przyjmując początkowo $a_i = 0$.

Po wyznaczeniu pól planetarnych, wyznaczenie mas planet nie nastręcza trudności, wyrażą się one jako

$$m_i = \frac{\hat{a}_i}{a_i} M . \quad (2.7)$$

2.2 Precyzja astrometryczna a wykrywalność planet

Istotną kwestią przy analizie metody astrometrycznej jest zależność między wykrywalnością planet a dokładnością pomiarów astrometrycznych. Przyjmijmy układ składający się z jednej planety o masie m , obiegającej gwiazdę o masie M po orbicie o pólosi wielkiej równej a . Oznaczmy odległość tego układu od obserwatora przez D . Zakładając że $m \ll M$ (a zatem $\hat{a} \ll a$), równanie (2.6) przybierze następującą, znaną postać:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad . \quad (2.8)$$

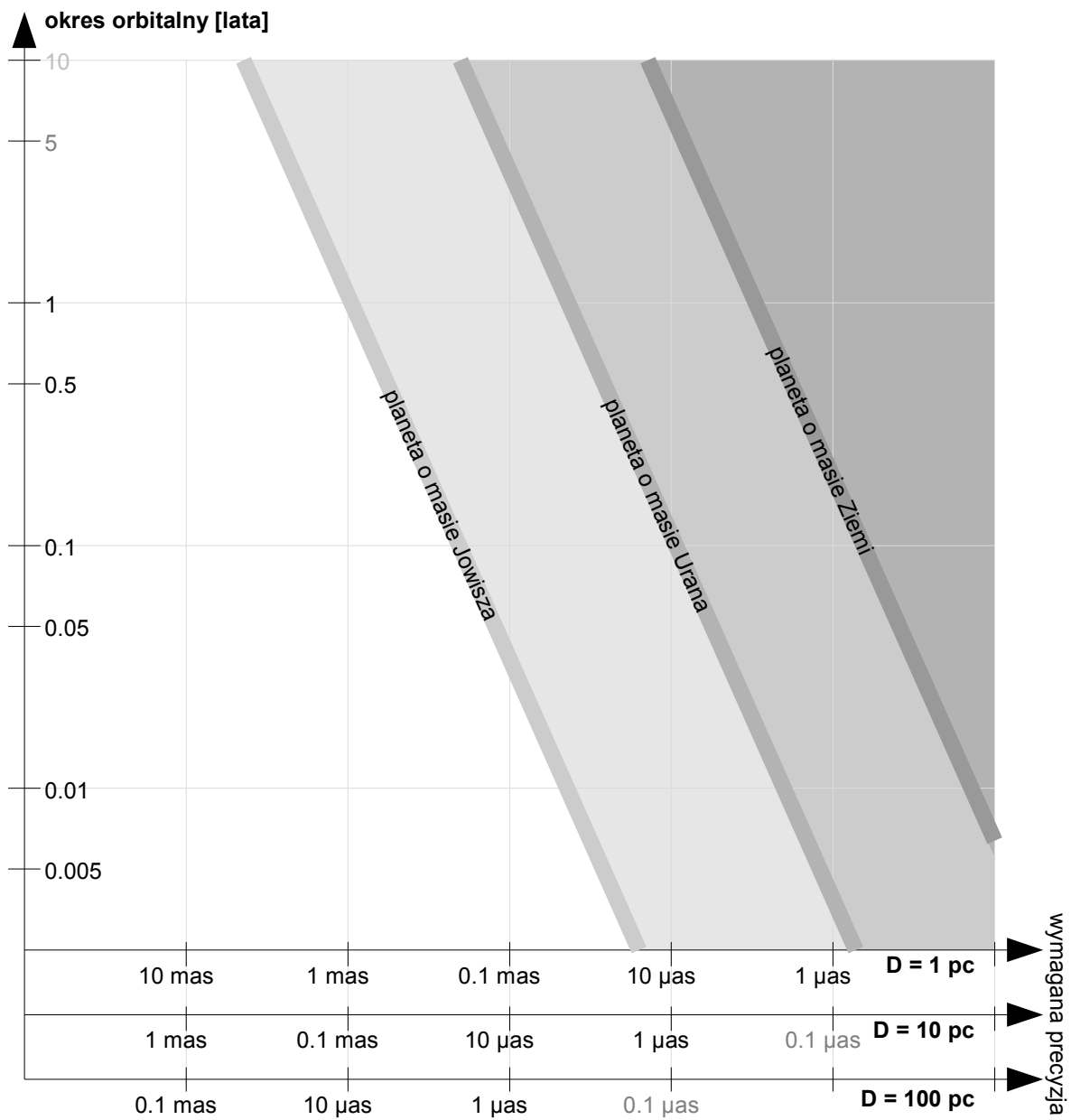
Biorąc pod uwagę powyższe równanie oraz równanie (2.7), maksymalne obserwowane kątowne przesunięcie (α) wynikające z ruchu gwiazdy wokół barycentrum swojego układu planetarnego wyrazi się jako

$$\alpha = \frac{m}{D} \sqrt[3]{\frac{GT^2}{4\pi^2 M^2}} \quad . \quad (2.9)$$

Wykrycie takiej planety będzie możliwe tylko wtedy, gdy niepewność pomiarów astrometrycznych będzie co najwyżej porównywalna z α . Dla gwiazdy o masie Słońca, zakresy wykrywalności planet o różnych masach przedstawione są na rysunku 2.1. Jak się okazuje, precyzja pomiarów na poziomie $1 \mu\text{as}$ jest wystarczająca do wykrywania planet o dużych masach, nawet jeśli układy, do których należą, są dość odległe od Słońca. Jednocześnie, znalezienie planety o masie zbliżonej do Ziemi jest możliwe tylko wokół gwiazd najbliższych, położonych w odległości kilku parseków od Słońca. Warto bowiem pamiętać, że szanse na uzyskanie dobrego dopasowania znacznie maleją, jeśli okres obiegu planety wokół gwiazdy jest dłuższy od przedziału czasowego, w którym wykonywane są obserwacje.

2.3 Wybór układu współrzędnych

Wektory oznaczające różne wielkości fizyczne mogą być wyrażone w dowolnym układzie współrzędnych sferycznych, jeśli tylko jest on dobrze zdefiniowany. Z tego powodu, wzory wyrażający wpływ różnych efektów uwzględnianych w redukcji są niezmiennicze ze względu na wybrany układ współrzędnych, a wymagają tylko, by wszystkie wielkości wykorzystywane we wzorze wyrażone były w tym samym układzie. Transformację pomiędzy dwoma wybranymi układami współrzędnych sferycznych da się zawsze przedstawić w postaci iloczynu co najwyżej trzech macierzy obrotu. W niniejszej pracy nie zachodzi potrzeba korzystania z więcej niż jednego układu współrzędnych, zatem kwestie związane z transformacjami pomiędzy nimi nie będą podejmowane.



Rysunek 2.1: Zależność między okresem orbitalnym planety a precyzją astrometryczną wymaganą do jej wykrycia, przedstawiona dla różnych mas planet i różnych odległości obserwatora od gwiazdy centralnej

Podstawowy problem z wyborem układu współrzędnych wynika z założenia precyzji na poziomie mikrosekundowym. Najdokładniejszy układ współrzędnych, ICRS (*International Celestial Reference System*, [15]), jest zdefiniowany z precyzją ocenianą na $30 \mu\text{s}$. Jednakże, jeśli pozycja gwiazdy w układzie ICRS będzie wyznaczana zawsze w ten sam sposób (np. wykorzystując tę samą gwiazdę referencyjną o ustalonym położeniu ICRS) to ewentualny błąd będzie miał charakter błędu systematycznego, tym samym nie zaburzając badania samej zmienności położenia. W takiej sytuacji można przyjąć zmodyfikowany układ współrzędnych, w którym położenie gwiazdy referencyjnej jest wyznaczone dokładnie, a więc wyznaczane na jej podstawie położenia gwiazdy badanej nie są obciążone żadnym dodatkowym błędem. Wtedy jednak, wszystkie inne położenia (np. wyznaczone z efemeryd położenia planet) posiadają dodatkową niepewność (o charakterze błędu systematycznego) równą dokładności wyznaczenia położenia gwiazdy referencyjnej. Niepewność ta będzie tu oznaczana przez η i będzie miała niewielki, choć zauważalny wpływ na precyzję wyników otrzymanych na drodze redukcji. Wartość η może wahać się, w zależności od wyboru gwiazdy referencyjnej (bądź zestawu gwiazd) od $30 \mu\text{s}$ dla obiektów referencyjnych wchodzących w skład ICRF aż do kilku milisekund dla większości gwiazd z katalogu *Hipparcos* [12]. Z uwagi na dużą liczbę gwiazd w tym katalogu, będącym obecnie podstawową (według: [9]) realizacją ICRS w zakresie widma optycznego, podzbiór gwiazd o $\eta < 1 \text{ mas}$ jest także dość liczny, można zatem przyjąć, że przy obserwacjach względnych dokładność wyznaczenia położenia gwiazdy referencyjnej będzie równa co najwyżej 1 mas .

2.4 Wybór skali czasu

We współczesnej astrometrii precyzyjne traktowanie pomiarów czasu jest nieodzowne. Zgodnie z Ogólną Teorią Względności, współrzędne czasowe, podobnie jak przestrzenne, podlegają nieliniowym transformacjom przy przejściach między różnymi układami odniesienia. W przypadku pomiarów, które mają być sprowadzane do barycentrum Układu Słonecznego, obowiązującą skalą czasu jest TCB (Barycentric Coordinate Time). Jest to skala czasu, którą mierzyłby zegar, znajdujący się stale w barycentrum Układu Słonecznego, jednocześnie nie odczuwając jego potencjału grawitacyjnego. Niemniej jednak, z tą skalą czasu związana jest pewna trudność. Jednostki i stałe fizyczne, zdefiniowane w układzie SI w ziemskim polu grawitacyjnym, nie są zgodne z pomiarem czasu względem tej skali. Użycie czasu TCB wymagałoby więc wprowadzenia innych (liczbowo) wartości pewnych stałych, takich jak chociażby długość jednostki astronomicznej. Jednakże, zgodnie z [7], w miejsce skali TCB może być wykorzystana skala czasu TDB

(Barycentric Dynamical Time), będąca liniową transformacją TCB. Dzięki temu, utrzymując rygorystyczne założenia dotyczące zgodności z OTW, można stosować dobrze zdefiniowane, znane wartości stałych fizycznych. Zaletą skali czasu TDB jest również, jak nadmieniono w [17], jej wysoka zgodność ze skalami czasu efemeryd.

Czas TDB z kolei związany jest z czasem TT (Terrestrial Time) transformacją zawierającą wyrazy okresowe o amplitudzie nie przekraczającej 2 ms. W zastosowaniu opisanym w niniejszej pracy precyzja pomiaru czasu nie jest tak kluczowa jak w innych dziedzinach zastosowania astrometrii, można więc zastosować, w miejsce czasu TDB, czas TT, będący z kolei związany z szeroko stosowaną skalą czasu UTC jako (na podstawie [9])

$$TT = UTC + 66^s.184 \quad . \quad (2.10)$$

Składnik obecny w powyższej transformacji zmienia się przy każdym wprowadzeniu sekundy przestępnej do czasu UTC (podano wartość na dzień 01 IX 2009).

Rozdział 3

Redukcja astrometryczna

Na obserwowane przez nas położenia ciał niebieskich ma wpływ bardzo wiele czynników. Mogą być one związane z rzeczywistym przemieszczaniem się ciał niebieskich względem swojego otoczenia, jak i (głównie) z efektami lokalnymi, związanymi z otoczeniem obserwatora. Przeprowadzenie klasyfikacji takich efektów i obliczenie ich wpływu na wyniki obserwacji jest konieczne, jeśli pomiary astrometryczne mają posłużyć do otrzymania jakichkolwiek fizykalnych informacji o obserwowanym obiekcie.

Każdy z kroków procesu redukcji niesie ze sobą pewien wkład do niepewności uzyskiwanych wyników. Ponieważ zakładana jest precyzja astrometryczna na poziomie $1 \mu\text{as}$, pożądane jest, aby dodatkowa niepewność modelu opisującego pojedynczy etap redukcji była mniejsza o rząd wielkości, czyli nie przekraczała $0.1 \mu\text{as}$.

3.1 Refrakcja atmosferyczna

Podczas obserwacji ciał niebieskich przy pomocy teleskopów naziemnych, światło pochodzące od tych ciał odbierane jest po przejściu przez atmosferę ziemską. Jej wpływ jest widoczny nie tylko w postaci absorpcji części promieniowania, lecz także poprzez ugięcie promienia świetlnego, przechodzącego z ośrodka o niższym współczynniku załamania (próżnia) do ośrodka optycznie gęstszego (atmosfera). W efekcie, obserwowane położenie źródła będzie odchyłało się w stronę zenitu tym bardziej, im grubszą warstwę atmosfery promień świetlny po drodze przebędzie. Pierwsze przybliżenie tego efektu stanowi model atmosfery płaskiej, z którego wynika następująca zależność pomiędzy obserwowaną (widomą) odległością zenitalną (z_{obs}) a właściwą¹ topocen-

¹współrzędne po wyeliminowaniu wpływu refrakcji określa się mianem „pozornych”, lecz w tym kontekście mogłoby to prowadzić do niejednoznaczności

tryczną odległością zenitalną (z_{topo}):

$$z_{\text{topo}} = z_{\text{obs}} + K \operatorname{tg}(z_{\text{obs}}) \quad . \quad (3.1)$$

Literą K oznaczona została tzw. stała refrakcji, zależna od lokalnych warunków obserwacji. Jeśli przez p oznaczmy ciśnienie atmosferyczne w miejscu obserwacji, zaś przez T temperaturę powietrza, otrzymamy dla światła widzialnego następującą, przybliżoną zależność:

$$K = 60'' \cdot 4 \cdot \frac{p/760 \text{ mm Hg}}{1 + T/273 \text{ K}} \quad . \quad (3.2)$$

Wzór (3.1) daje dość dobre oszacowanie tylko dla niewielkich odległości zenitalnych, zarówno dlatego, że jest przybliżeniem pierwszego rzędu, jak i z powodu nieuwzględniania krzywizny atmosfery, która dla większych odległości zenitalnych zaczyna być znacząca. Nieco lepsze przybliżenie otrzymamy dla modelu atmosfery kulistej:

$$z_{\text{topo}} = z_{\text{obs}} + A \operatorname{tg}(z_{\text{obs}}) + B \operatorname{tg}(z_{\text{obs}})^3 + \dots \quad , \quad (3.3)$$

przy czym widoczne tu stałe mają analityczną postać teoretyczną, opisaną w [5, s. 93] i dla warunków normalnych ($T = 273 \text{ K}$, $p = 760 \text{ mm Hg}$) przyjmuje się $A = 60'' \cdot 29$, $B = 0'' \cdot 06688$. Dużo dokładniejsze dopasowanie otrzymuje się jednak, wyznaczając wartości stałych empirycznie dla danych warunków obserwacyjnych. W razie potrzeby, można dodawać kolejne wyrazy rozwinięcia i w ten sposób uzyskiwać dokładniejsze wyniki dla większych odległości zenitalnych.

Jak można zauważyć, efekty refrakcji są dużo silniejsze od wszystkich pozostałych efektów uwzględnianych w redukcji astrometrycznej. Nawet w przypadku astrometrii względnej, wykorzystanie równania (3.3) nie jest wystarczające do przeprowadzenia pomiarów o wysokiej dokładności. Muszą więc być wykorzystywane złożone modele numeryczne, biorące pod uwagę nie tylko samą wartość ciśnienia i temperatury, ale także ich lokalne gradienty, a często także skład chemiczny atmosfery. Efekty refrakcji atmosferycznej zależą też w ogólności od długości fali mierzonego promieniowania, więc dla fal radiowych redukcja wpływu refrakcji będzie wymagała innego podejścia niż dla obserwacji w świetle widzialnym. Z drugiej jednak strony, pomiary wykonywane z przestrzeni kosmicznej, a właśnie takie pomiary stanowią dużą szansę dla astrometrycznego poszukiwania planet, nie są obciążone wpływem refrakcji.

W związku z tym, w dalszej części opracowania położeniem obserwowanym gwiazdy określać się będzie położenie wolne od efektu refrakcji atmosferycznej.

3.2 Aberracja światła

Wektor jednostkowy wskazujący kierunek do źródła, będący wynikiem obserwacji, jest określony w układzie odniesienia związanym z odbiornikiem. Pierwszym krokiem w redukcji jest więc wyeliminowanie efektu aberracyjnego związanego z barycentryczną prędkością obserwatora. Wynikiem tego etapu redukcji będzie wektor kierunkowy do źródła zdefiniowany w układzie spoczywającym względem barycentrum, ale zgodnym z układem odbiornika co do położenia (w chwili pomiaru).

Warto w tym momencie zauważyć, że wpływ efektu aberracji jest znacznie większy od innych, uwzględnianych tu efektów, przekraczając o siedem rzędów wielkości zakładaną w tym modelu precyzję astrometryczną. W związku z tym, aby redukcja tego efektu była odpowiednio precyzyjna, musi zostać wykonana zgodnie z Ogólną Teorią Względności. Wzory transformacyjne można więc albo wyprowadzić bezpośrednio z równań czasoprzestrzeni w OTW, albo wykorzystać transformacje znane ze Specjalnej Teorii Względności, interpretując odpowiednio obecne tam wielkości fizyczne (np. prędkość). Taki właśnie sposób został wykorzystany w pracy [7], będzie on więc wprowadzony także tutaj.

Transformacje Lorentza pokazują, że przy przechodzeniu od jednego układu odniesienia do innego, jeśli układy te nie pozostają względem siebie w spoczynku, pojawia się pozorna zmiana długości w kierunku zgodnym ze względną prędkością obu układów. Jeśli przenosimy dowolny wektor ($\vec{r}$) z układu, który określimy jako „spoczywający” do innego, poruszającego się względem niego z prędkością $\vec{v}$, to wektor ten w drugim układzie ($\vec{r}'$) będzie miał postać opisaną, przyjmąwszy oznaczenie $\gamma = (1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2})^{-1/2}$, następująco:

$$\vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1) \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} (\vec{v} \cdot \vec{r}) \quad . \quad (3.4)$$

Sprowadzenie wektorów obecnych w powyższej transformacji do wektorów jednostkowych prowadzi do następującej, wskazanej w [7, s. 1587] zależności, łączącej obserwowany kierunek do gwiazdy ($\vec{s}_{\text{obs}}$) z kierunkiem w układzie spoczywającym ($\vec{s}_{\text{spocz}}$):

$$\vec{s}_{\text{obs}} = \frac{\vec{s}_{\text{spocz}} + \left(\frac{\gamma}{c} + (\gamma - 1) \frac{\vec{v} \cdot \vec{s}_{\text{spocz}}}{|\vec{v}|^2} \right) \vec{v}}{\gamma \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{s}_{\text{spocz}}}{c} \right)} \quad . \quad (3.5)$$

Wpływ efektów właściwych dla Ogólnej Teorii Względności, czyli grawitacyjnego zakrzywienia czasoprzestrzeni, wyraża się w definicji prędkości układu współporuszającego się z obserwatorem względem układu spoczywającego wraz z barycentrum. Prędkość tą ($\vec{v}$) można obliczyć, znając barycentryczne położenie odbiornika w chwili

obserwacji ($\vec{x}$) wraz z jego barycentryczną prędkością – w sensie pochodnej położenia po czasie ($\dot{\vec{x}}$). Odpowiednia formuła wyraża się, według [7, s. 1587], następująco:

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}} \left[1 + \frac{1}{c^2} (1 + \Gamma) w(\vec{x}) \right] . \quad (3.6)$$

W powyższym wzorze $w(\vec{x})$ oznacza potencjał grawitacyjny w punkcie $\vec{x}$, zaś Γ jest bezwymiarowym parametrem wyrażającym odstępstwa od OTW (przy pełnej zgodności z teorią $\Gamma = 1$).

Powyższe formuły są prawdziwe z dokładnością do wyrażen rzędu $(\frac{|\dot{\vec{x}}|}{c})^4$. Poprawka tego rzędu osiąga wartość $0.1 \mu\text{as}$ dopiero dla $|\vec{v}| \approx 200 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, zatem dla znakomitej większości przypadków poprawki tego rzędu mogą być pominięte.

Na dokładność obliczeń wpływa także, i to w znacznym stopniu, precyzja wyznaczenia położenia i prędkości obserwatora. Niepewność wyznaczonego kierunku $\vec{s}_{\text{spocz}}$ można wyznaczyć metodą różniczki zupełnej z innej, podanej w [7, s. 1586], postaci formuły aberracyjnej. Otrzymane wyrażenie z dokładnością do wyrazów najwyższego rzędu jest następujące:

$$|\Delta \vec{s}_{\text{spocz}}| = |\Delta \vec{s}_{\text{obs}}| + \frac{1}{c} |\Delta \dot{\vec{x}}| + \frac{|\dot{\vec{x}}|}{c^3} (1 + \Gamma) \Delta w(\vec{x}) . \quad (3.7)$$

Wyraz związany z dokładnością wyznaczenia potencjału grawitacyjnego jest całkowicie pomijalny, istotny jest natomiast wyraz zależny od dokładności wyznaczenia prędkości obserwatora. W tabeli 3.1 przedstawione jest zestawienie różnych poziomów precyzji pomiaru prędkości barycentrycznej wraz z błędem astrometrycznym na każdym z tych poziomów.

błąd (μas)	maks. $ \Delta \dot{\vec{x}} (\frac{\text{m}}{\text{s}})$
0.1	0.00015
1	0.0015
10	0.015
100	0.15
1000	1.46

Tablica 3.1: Dopuszczalna niepewność wyznaczenia prędkości barycentrycznej obserwatora w zależności od żądanej precyzji astrometrycznej

Zgodnie z założeniem dotyczącym wybranego układu współrzędnych, kierunek zmierzonej prędkości jest dodatkowo obciążony błędem systematycznym η . Na podstawie równania (3.7), efekt ten powoduje w ostatecznym wyniku błąd, którego górne

ograniczenie, w zależności od $|\dot{\vec{x}}|$, wynosi $\eta \cdot \frac{|\dot{\vec{x}}|}{c}$. Przyjmując $\eta = 1 \text{ mas}$, błąd ten przekracza wartość $0.1 \mu\text{as}$ dla $|\vec{v}| \geq 30 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Jako że jest to prędkość rzędu prędkości orbitalnej Ziemi, w większości przypadków wynikający stąd błąd byłby znaczący dla precyzji pomiarów i jako taki musiałby być wzięty pod uwagę.

Zawarte w tabeli 3.1 wymagania dotyczące precyzji wyznaczenia barycentrycznej prędkości obserwatora dla precyzji astrometrycznej $1 \mu\text{as}$ (a tym bardziej $0.1 \mu\text{as}$) są nie-realne do spełnienia zarówno w przypadku obserwacji satelitarnych, jak i naziemnych (interferometrycznych). Konieczne jest zatem znalezienie alternatywnego podejścia do redukcji efektu aberracji.

3.2.1 Aberracja w astrometrii względnej

Załóżmy, że mierzymy jednocześnie kierunek do gwiazdy odniesienia ($\vec{\sigma}_{\text{obs}}$) oraz do interesującej nas gwiazdy ($\vec{s}_{\text{obs}}$). Metoda taka nadawałaby się szczególnie do analizy obserwacji interferometrycznych, w których z założenia otrzymujemy pomiar względem źródła kalibracyjnego, znajdującego się w niewielkiej (maksymalnie 1–2 stopni) od badanego obiektu. Kierunki do obu gwiazd w układzie spoczywającym (względem barycentrum Układu Słonecznego) oznaczmy odpowiednio przez $\vec{\sigma}_{\text{spocz}}$ i $\vec{s}_{\text{spocz}}$. Skoro interesuje nas tylko ocena niepewności, związki pomiędzy tymi wielkościami można wyrazić w postaci formuły aberracyjnej pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{\text{obs}} &= \vec{\sigma}_{\text{spocz}} + \frac{1}{c}(\vec{\sigma}_{\text{spocz}} \times (\dot{\vec{x}} \times \vec{\sigma}_{\text{spocz}})) \quad , \\ \vec{s}_{\text{obs}} &= \vec{s}_{\text{spocz}} + \frac{1}{c}(\vec{s}_{\text{spocz}} \times (\dot{\vec{x}} \times \vec{s}_{\text{spocz}})) \quad .\end{aligned}\tag{3.8}$$

Korzystając z tego, że mierzymy położenie gwiazdy względem odniesienia, możemy zapisać:

$$\begin{aligned}\vec{s}_{\text{obs}} &= \vec{\sigma}_{\text{obs}} + \vec{\delta} \quad , \\ \vec{s}_{\text{spocz}} &= \vec{\sigma}_{\text{spocz}} + \vec{\epsilon} \quad .\end{aligned}\tag{3.9}$$

Warto w tym miejscu zauważyć, że $\vec{\delta}$ oraz $\vec{\epsilon}$ nie są wektorami o jednostkowej długości, lecz odpowiadają różnicy dwóch położeń na sferze niebieskiej. Podstawiając równanie (3.9) do formuły (3.8) i łącząc ze sobą oba równania otrzymamy:

$$\vec{\epsilon} = \vec{\delta} - \frac{1}{c}(\vec{\sigma}_{\text{spocz}} \times (\dot{\vec{x}} \times \vec{\epsilon}) + \vec{\epsilon} \times (\dot{\vec{x}} \times \vec{\sigma}_{\text{spocz}}) + \vec{\epsilon} \times (\dot{\vec{x}} \times \vec{\epsilon})) \quad .\tag{3.10}$$

Porządkując stronami wynikową formułę, stosując metodę różniczki zupełnej i ograniczając od góry wyrazy rozwinięcia (ostatni wyraz, równy $\vec{\epsilon} \times (\dot{\vec{x}} \times \vec{\epsilon})$, jest pomijalny)

otrzymamy uwikłane oszacowanie:

$$|\Delta \vec{\epsilon}| = |\Delta \vec{\delta}| + \frac{2|\vec{\epsilon}|}{c} |\Delta \dot{\vec{x}}| \quad , \quad (3.11)$$

powracając natomiast do równań (3.9) otrzymujemy ostatecznie:

$$|\Delta \vec{s}_{\text{spocz}}| = |\Delta \vec{\sigma}_{\text{spocz}}| + |\Delta \vec{\delta}| + \frac{2|\vec{\epsilon}|}{c} |\Delta \dot{\vec{x}}| \quad . \quad (3.12)$$

Warto wspomnieć, że mimo iż $\vec{\sigma}_{\text{spocz}}$ jest położeniem gwiazdy referencyjnej uwolnionym od wpływu aberracji, to jest ono wciąż obciążone efektem grawitacyjnego ugięcia światła (rozdział 3.3), który musi zostać wymodelowany na podstawie położenia ICRS. W związku z tym, $|\Delta \vec{\sigma}_{\text{spocz}}|$ jest wciąż różne od zera.

Okazuje się, że przy założeniu niewielkiej odległości pomiędzy mierzonymi gwiazdami, metoda astrometrii względnej pozwala na dużo precyzyjniejszy pomiar niż metoda bezwzględna. Od razu można zauważyć, że błąd orientacji osi układu η nieprzekraczający kilku milisekund kąta, w astrometrii względnej nie ma praktycznie żadnego znaczenia. W tabeli 3.2 porównano wpływ dokładności wyznaczenia prędkości na precyzję astrometryczną dla obu rodzajów pomiarów — symbolem θ oznaczona została odległość kątowa pomiędzy gwiazdą mierzoną a referencyjną.

błąd (μas)	maks. $ \Delta \dot{\vec{x}} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$		
	pomiar bezwzględny	pomiar względne	
		$\theta = 1^\circ$	$\theta = 10'$
0.1	0.00015	0.017	0.10
1	0.0015	0.17	1.00
10	0.015	1.67	10.04
100	0.15	16.73	100.38
1000	1.46	167.30	1003.82

Tablica 3.2: Dopuszczalna niepewność wyznaczenia prędkości barycentrycznej obserwatora w zależności od żądanej precyzji astrometrycznej — porównanie pomiarów bezwzględnych i pomiarów względem gwiazdy referencyjnej oddalonej o kąt θ

Otrzymane w tabeli 3.2 wymagania na dokładność wyznaczenia $\dot{\vec{x}}$ są znacznie bardziej prawdopodobne do osiągnięcia, nawet w przypadku naziemnych obserwacji interferometrycznych. Zakładając, że wyniki obserwacji zostaną przedstawione w układzie związanym z geocentrum, wymagana dokładność może zostać osiągnięta dzięki wykorzystaniu odpowiednio precyzyjnej efemerydy. Dla przykładu, przedstawiona w

[2] efemeryda *INPOP08* pozwala na osiągnięcie precyzji wyznaczenia prędkości rzędu $10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, co jest w pełni wystarczające do przeprowadzenia redukcji efektu aberracji na poziomie $0.1 \mu\text{as}$.

Warto zauważyć fakt, że w celu wykorzystania korzyści, jakie oferuje zwiększona dokładność pomiarów względnych, wcale nie trzeba uciekać się do specjalnych metod redukcji. Jeżeli pomiary położenia gwiazdy były dokonywane zawsze względem tej samej gwiazdy referencyjnej (lub tego samego zestawu gwiazd), tak jak zaproponowano to w rozdziale 2.3, to jest to samo przez się wystarczające do oceny niepewności równaniem (3.12), nie zaś równaniem (3.7).

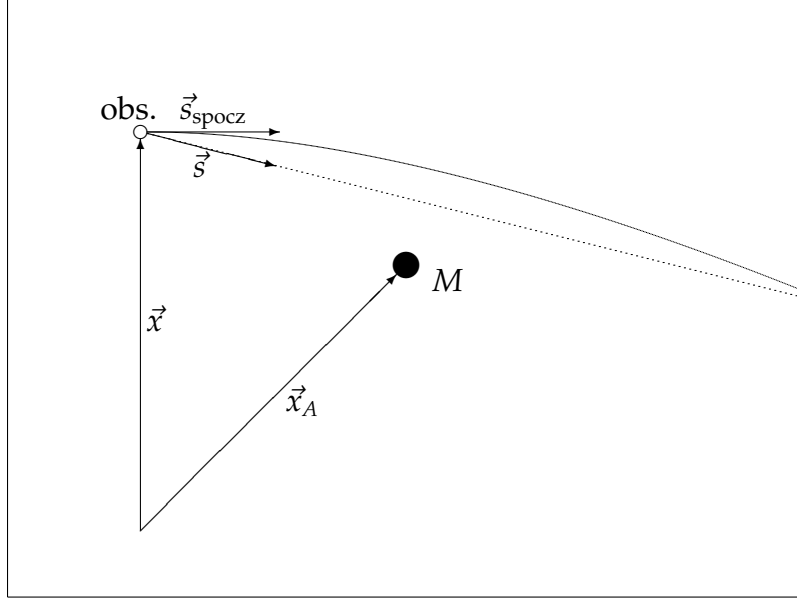
3.3 Grawitacyjne ugięcie światła

Po wyeliminowaniu efektów aberracyjnych, wynikowy kierunek $\vec{s}_{\text{spocz}}$ jest już niezależny od ruchu obserwatora, wciąż jest natomiast obciążony efektami wynikającymi z obecności oddziałujących grawitacyjnie obiektów z jego otoczenia. Kolejny etap redukcji ma za zadanie pozbycie się wpływu pola grawitacyjnego ciał Układu Słonecznego. Oprócz tego, że konieczne jest uwzględnienie wpływu Słońca, przy mikrosekundowej precyzji znaczący staje się także wpływ planet, a nawet niektórych małych ciał Układu Słonecznego.

Pole grawitacyjne ciał Układu Słonecznego (a szczególnie planet olbrzymów) ma symetrię sferyczną tylko w przybliżeniu. Aby przeprowadzić dokładną redukcję, należy wziąć pod uwagę nie tylko składową sferyczną pola grawitacyjnego, ale także składowe związane ze składowymi wyższych rzędów. Składowe te wyrażają się ilościowo poprzez współczynniki rozkładu harmonicznego potencjału grawitacyjnego (tzw. harmoniki strefowe) $J_2, J_3, \dots$ charakterystyczne dla danego ciała. Rozdzielając składową sferyczną od pozostałych składowych i korzystając z wprowadzonej w [7, s. 1591] formuły opisującej wpływ sferycznie symetrycznego pola grawitacyjnego, można zapisać związek pomiędzy kierunkiem do źródła obciążonym efektem grawitacyjnego ugięcia światła ($\vec{s}_{\text{spocz}}$) a kierunkiem uwolnionym od tego efektu ($\vec{s}$):

$$\vec{s}_{\text{spocz}} = \vec{s} + \sum_A \left[\overbrace{\frac{(1 + \Gamma)GM_A}{c^2} \frac{\vec{d}_A}{|\vec{d}_A|^2} \left(1 + \frac{\vec{s} \cdot \vec{r}_A}{|\vec{r}_A|} \right)}^{\delta_{\text{sfer}}} + \vec{\delta}_{J_2} + \vec{\delta}_{J_3} + \dots \right] . \quad (3.13)$$

W powyższym wzorze sumowanie zachodzi po wszystkich branych pod uwagę źródłach pola grawitacyjnego, $\vec{d}_A = \vec{s} \times (\vec{s} \times \vec{r}_A)$, zaś $\vec{r}_A$ oznacza wektor od obserwatora do źródła pola w momencie obserwacji ($\vec{r}_A = \vec{x}_A - \vec{x}$).



Rysunek 3.1: Schemat zjawiska grawitacyjnego ugięcia światła

W celu przeprowadzenia rachunku błędów, warto skorzystać z innej, podanej w [7, s. 1591], postaci formuły (3.13) wyrażającej wpływ składowej sferycznej:

$$\delta_{\text{sfer}} = \frac{(1 + \Gamma)GM_A}{c^2|\vec{r}_A|} \operatorname{ctg} \frac{\angle(\vec{r}_A, \vec{s})}{2} . \quad (3.14)$$

Dla uproszczenia zapisu oznaczmy $\psi = \angle(\vec{r}_A, \vec{s})$. Stosując metodę różniczki zupełnej otrzymamy:

$$\Delta\delta_{\text{sfer}} = \frac{(1 + \Gamma)GM_A}{c^2} \left(\frac{\operatorname{ctg} \frac{\psi}{2}}{|\vec{r}_A|^2} |\Delta\vec{r}_A| + \frac{1}{|\vec{r}_A|(\sin \frac{\psi}{2})^2} \Delta\psi \right) . \quad (3.15)$$

Zmianę $\Delta\psi$ na skutek małego przesunięcia $\Delta\vec{r}_A$ można w prosty sposób oszacować:

$$\Delta\psi \leq \frac{|\Delta\vec{r}_A|}{|\vec{r}_A|} . \quad (3.16)$$

Podstawiając (3.16) do (3.15) otrzymujemy:

$$\Delta\delta_{\text{sfer}} = \frac{(1 + \Gamma)GM_A}{c^2|\vec{r}_A|^2} \left[\operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} + \left(\csc \frac{\psi}{2} \right)^2 \right] |\Delta\vec{r}_A| . \quad (3.17)$$

Powracając do równania (3.13), można obliczyć maksymalny wpływ składowej sferycznej, który zachodzić będzie dla odległości kątowej ψ równej promieniowi kątowemu ciała $\psi_A = \frac{R_A}{|\vec{r}_A|}$, gdzie przez R_A oznaczono promień fizyczny ciała. Podstawiając $\psi = \psi_A$ do (3.14) otrzymujemy:

$$\sup \delta_{\text{sfer}} = \frac{(1 + \Gamma)GM_A}{c^2|\vec{r}_A|} \operatorname{ctg} \frac{R_A}{2|\vec{r}_A|} , \quad (3.18)$$

zaś korzystając z tego, że $\text{ctg } \psi \approx \psi^{-1}$ oraz przyjmując $\Gamma = 1$, otrzymujemy:

$$\sup \delta_{\text{sfer}} = \frac{2GM_A}{c^2|\vec{r}_A|} \cdot \frac{2|\vec{r}_A|}{R_A} = \frac{4GM_A}{R_A c^2} . \quad (3.19)$$

Na podstawie [7, s. 1591], wpływ efektów wynikających z poszczególnych składowych niesferycznych oszacować można jako:

$$\delta_{J_n} \leq J_n \left(\frac{\text{ctg } \psi}{\text{ctg } \psi_A} \right)^{n+1} \sup \delta_{\text{sfer}} . \quad (3.20)$$

Jeśli składowe niesferyczne pola grawitacyjnego są zanedbywane, oznacza to, że $\Delta\delta_{J_n} = \delta_{J_n}$. Na podstawie (3.20) i (3.24), oraz zanedbując wyższe niż kwadrupolowe składowe pola grawitacyjnego, całkowity wpływ tego etapu redukcji na dokładność wyznaczonego położenia wyniesie:

$$\Delta\delta = \frac{2GM_A}{c^2} \left[\frac{|\Delta\vec{r}_A|}{|\vec{r}_A|^2} \left(\csc \frac{\psi}{2} \right)^2 + \frac{J_2}{R_A} \left(\frac{\text{ctg } \psi}{\text{ctg } \psi_A} \right)^3 \right] . \quad (3.21)$$

Korzystając raz jeszcze z przybliżenia małych kątów oraz podstawiając $\psi_A = \frac{R_A}{|\vec{r}_A|}$, otrzymujemy:

$$\Delta\delta = \frac{4GM_A}{\psi^2 c^2 |\vec{r}_A|^2} \left(2|\Delta\vec{r}_A| + \frac{J_2 R_A^2}{\psi |\vec{r}_A|} \right) . \quad (3.22)$$

Niepewność położenia obiektu wyrażająca się składnikiem $|\Delta\vec{r}_A|$ ma dwie przyczyny. Po pierwsze, składa się na nią dokładność efemerydy, z której wyznaczana jest trajektoria obiektu. Po drugie, kierunek tego wektora jest obciążony błędem η (rozdział 2.3), który przekłada się na niepewność przestrzenną. Mamy zatem

$$|\Delta\vec{r}_A| = \Delta_{\text{efem}} + \frac{\eta}{|\vec{r}_A|} . \quad (3.23)$$

Przy takim podstawieniu rachunek błędów wyraża się następująco:

$$\Delta\delta = \frac{4GM_A}{\psi^2 c^2 |\vec{r}_A|^2} \left[2\Delta_{\text{efem}} + \frac{1}{|\vec{r}_A|} \left(2\eta + \frac{J_2 R_A^2}{\psi} \right) \right] . \quad (3.24)$$

Równanie powyższe można rozwiązać numerycznie, poszukując minimalnej dopuszczalnej odległości kątowej wymaganej dla określonego poziomu precyzji. Poniższa tabela zawiera wartości ψ dla dopuszczalnej niepewności $0.1 \mu\text{as}$ oraz różnych dokładności wyznaczenia położenia ciał (Δ_{efem}). Przyjęto, że obserwator znajduje się w niewielkiej odległości od orbity Ziemi, zaś $\eta = 0.5 \text{ mas}$. Współczynniki J_2 oraz parametry fizyczne planet zaczerpnięto z [10].

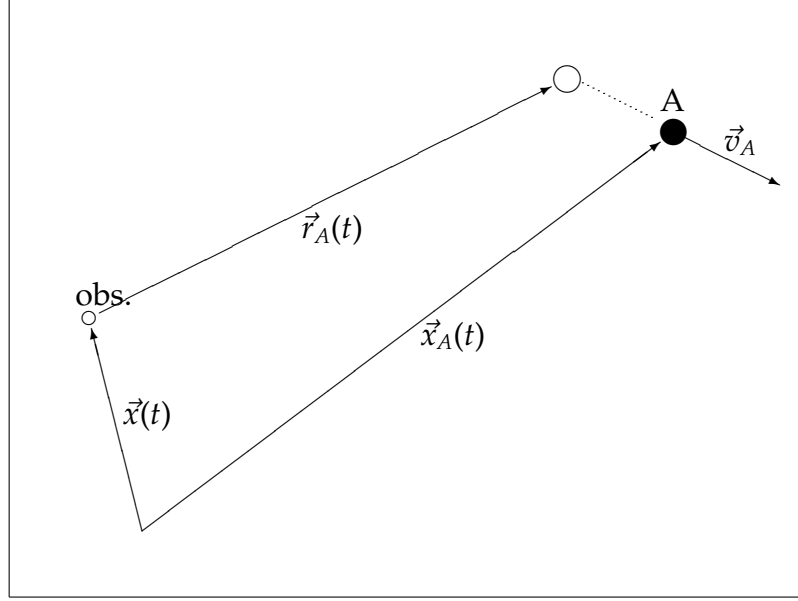
ciało	$\sup \delta_{\text{sfer}}$	$\sup \delta_{J_2}$	ψ_A	$\psi (")$ w zależności od Δ_{efem} (km)				
	(μas)	(μas)	($"$)	0.1	1	5	10	100
Słońce	1".75	...	16'	1°.3	2°.2	4°.4	6°.1	19°
Merkury	83	...	5.5	3.1	5.2	11	15	46
Wenus	493	...	30	19	41	87	123	386
Mars	116	0.2	8.9	13	14	20	25	75
Jowisz	16300	240	23	318	321	331	345	557
Saturn	5770	94	9.7	98	99	101	104	156
Uran	2030	6.8	2.0	9.8	10	11	13	26
Neptun	2490	8.5	1.2	7.2	7.3	7.9	8.7	18

Tabela powyższa ma przede wszystkim wartość poglądową, zaś dla samego procesu redukcji istotne jest równanie (3.24), dzięki któremu można w dowolnej sytuacji oszacować niepewność pochodzącą z redukcji efektu grawitacyjnego ugięcia światła. Dla uzyskania omawianej precyzji należy w ramach redukcji uwzględnić nie tylko podane w tabeli ciała, lecz także wszystkie ciała o promieniach (R_A) i gęstościach (ρ) spełniających zależność nadmienioną w [7]:

$$R_A \geq \left(\frac{\rho}{1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} \right)^{-1/2} 197 \text{ km} . \quad (3.25)$$

Zależność tą spełniają wszystkie planety, przeważająca większość ich naturalnych satelitów, planety karłowate (Ceres, Pluton, Eris, Makemake, Haumea) oraz duża liczba obiektów pasa Kuipera. Na szczęście, dużą część przywołanych ciał stanowią obiekty małe i położone w dużej odległości od Ziemi, dzięki czemu powodowane przez nie efekty grawitacyjne istotne są tylko dla bardzo małych odległości kątowych. Z drugiej jednak strony, z powodu dużej ilości takich obiektów, zaniedbanie ich wpływu może prowadzić do pojawienia się dodatkowego szumu, skutecznie utrudniającego właściwą analizę pomiarów o wysokiej dokładności.

W przypadku obserwacji w małej odległości kątowej od Słońca, kluczowe znaczenie ma opisany w pracy [7] efekt wynikający ze skończonej odległości przestrzennej do gwiazdy. Jeśli efekt ten jest zaniedbywany (tak jak w tym modelu), redukcja może być przeprowadzona tylko w obszarze, w którym jego amplituda nie przekracza zakładanej wartości. Dla dopuszczalnego błędu $0.1 \mu\text{as}$ minimalna odległość kątowa od Słońca wynosi $22^\circ.7$ i maleje ona odwrotnie proporcjonalnie wraz ze zmniejszaniem precyzji, dla błędu nieprzekraczającego $1 \mu\text{as}$ wynosi więc zatem już tylko $2^\circ.3$.



Rysunek 3.2: Zjawisko aberracji planetarnej

3.3.1 Aberracja planetarna

Obiekty Układu Słonecznego poruszają się względem nas z określonymi prędkościami. Zatem, jeśli obiekt taki jest źródłem światła (własnego lub odbitego), to w odstępie czasu między emisją światła a odebraniem go przez nas, obiekt zdąży przebyć pewną drogę w przestrzeni. W związku z tym, widzimy obiekty z pewnym, niewielkim choć znaczącym, opóźnieniem. Co więcej, skoro żaden rodzaj oddziaływania nie może przemieszczać się szybciej od światła, to i oddziaływanie grawitacyjne wpływa na nas z takim samym opóźnieniem. Tak więc, nawet jeżeli obserwacje nasze nie dotyczą bezpośrednio ciał Układu Słonecznego, to efekt ten i tak brać musimy pod uwagę, jeśli potrzebna jest dokładna wartość potencjału pola grawitacyjnego $w(\vec{x})$, lub też jeśli wymagana jest redukcja efektu grawitacyjnego ugięcia światła.

Przy pomocy efemerydy możemy wyznaczyć geometryczne położenie określonego ciała względem barycentrum Układu Słonecznego w dowolnej chwili. Oznaczmy takie „geometryczne” położenie przez $\vec{x}_A(t)$. Analogicznie, potrafimy wyznaczyć geometryczne położenie obserwatora $\vec{x}(t)$. Jeśli przez $\vec{r}(t)$ oznaczmy wektor (także w układzie BCRS) łączący w chwili t obserwatora z widzianym przez niego obrazem ciała, możemy zapisać zależność:

$$\vec{r}(t) = \vec{x}_A(t - \frac{|\vec{r}(t)|}{c}) - \vec{x}(t) \quad . \quad (3.26)$$

Jest to zależność uwikłana, może być jednak rozwiązana metodą iteracyjną, przyjąwszy początkowo $\vec{r}(t) = \vec{0}$.

3.4 Paralaksa heliocentryczna i ruch własny

Kolejnym krokiem w redukcji astrometrycznej jest uwzględnienie efektu paralaksy heliocentrycznej, czyli pozornego, czysto geometrycznego przesunięcia obrazu gwiazdy na niebie z powodu określonej pozycji obserwatora względem barycentrum Układu Słonecznego. W tradycyjnej astrometrii (co zostało szczegółowo opisane w [5]), redukcji tego efektu dokonuje się przy pomocy wyznaczonego dla danej gwiazdy parametru paralaktycznego, powiązanego bezpośrednio z odległością, a wyrażającego amplitudę rocznego ruchu obrazu gwiazdy na sferze niebieskiej spowodowanego efektem paralaksy.

W przypadku astrometrii o precyzji mikrosekundowej, utrzymanie takiego podejścia wymagałoby wyznaczenia parametrów paralaktycznych z takową dokładnością. Aby ominąć ten problem, redukcję efektu paralaksy należy przenieść do etapu modelowania, dopasowując do obserwacji pełny, trójwymiarowy przebieg ruchu gwiazdy względem obserwatora, uwzględniający również i ruch obserwatora względem barycentrum Układu Słonecznego. Za takim traktowaniem efektu paralaksy przemawia również fakt, że przy dużej dokładności nie można zaniedbać efektów związanych ze zmianą odległości do gwiazdy na skutek jej ruchu w przestrzeni, a ich uwzględnienie nie jest możliwe w przypadku redukcji opierającej się wyłącznie o stałą wartość parametru paralaktycznego.

Analogiczna sytuacja zachodzi w przypadku efektów ruchu własnego, wynikających z wypadkowej prędkości gwiazdy względem Układu Słonecznego. Również i tutaj współczynniki ruchu własnego μ_α i μ_δ musiałyby być wyznaczone z dokładnością mikrosekundową. Co więcej, założenie, że pozostają one stałe, nie jest uzasadnione na zakładanym tutaj progu dokładności. Efekt ruchu własnego zostanie więc także włączony do etapu modelowania.

Rozdział 4

Astrometryczny model układu planetarnego

Modelowanie ruchu gwiazdy przeprowadzane jest w tradycyjnej astrometrii przy wykorzystaniu współczynników ruchu własnego μ_α i μ_δ , przyjmując tym samym stałość tych współczynników w określonym przedziale czasu. W przypadku astrometrii o dokładności mikrosekundowej, takie podejście jest, jak pokazano chociażby w [19], niewystarczające. Odpowiednio dokładny model może być natomiast skonstruowany na podstawie wektorowych równań ruchu gwiazdy przy uwzględnieniu efektów propagacji światła.

Układ odniesienia związany z barycentrum Układu Słonecznego będzie oznaczany jako $\mathcal{BS}$, zaś układ związany z obserwatorem jako $\mathcal{O}$. Barycentrum układu składającego się z gwiazdy i okrążających ją planet będzie oznaczane jako $\mathcal{BG}$, zaś układ związany z gwiazdą jako $\mathcal{G}$. Ponadto, ważne jest rozróżnienie pomiędzy położeniem geometrycznym, wynikającym wprost z równań ruchu, a astrometrycznym, przy którym uwzględnia się także czas propagacji światła. Celem tego rozdziału będzie powiązanie zależnościami astrometrycznego położenia $\mathcal{G}$ względem $\mathcal{O}$.

4.1 Ruch gwiazdy w ujęciu wektorowym

Jak wspomniano wcześniej, układ $\mathcal{BS}$ można z dużym przybliżeniem uznać za układ inercjalny. Odpowiednim punktem wyjścia będzie zatem wprowadzenie równań właśnie w tym układzie. Z uwagi na względnie krótkie przedziały czasu obserwacji, ruch $\mathcal{BG}$ względem $\mathcal{BS}$ można z bardzo dobrym przybliżeniem uznać za jednostajny. Oznaczając charakteryzującą go prędkość przez $\vec{v}_g$, możemy określić geometryczne położe-

nie $\mathcal{BG}$ względem $\mathcal{BS}$, oznaczone jako $\vec{\rho}(t)$, równaniem:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_g \quad . \quad (4.1)$$

Dla dowolnie wybranego t_A prawdziwa będzie równość:

$$\vec{\rho}(t) = \vec{\rho}(t_A) + (t - t_A)\vec{v}_g \quad . \quad (4.2)$$

Położenie $\mathcal{G}$ względem $\mathcal{BS}$, oznaczane przez $\vec{\rho}_*(t)$, będzie dodatkowo obciążone małym zaburzeniem $\vec{\epsilon}(t)$, wynikającym z obecności planet:

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_*(t) &= \vec{\rho}(t) + \vec{\epsilon}(t) \\ &= \vec{\rho}(t_A) + (t - t_A)\vec{v}_g + \vec{\epsilon}(t) \quad . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Aby wyznaczyć właściwe położenie astrometryczne $\mathcal{G}$ względem $\mathcal{BS}$, należy wziąć pod uwagę czas propagacji światła. Z uwagi na przestrzenny ruch gwiazdy wartość tej poprawki nie będzie stała. Oznaczając położenie astrometryczne poprzez $\vec{r}_B(t)$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \vec{r}_B(t) &= \vec{\rho}_*(t - \frac{|\vec{r}_B(t)|}{c}) \\ &= \vec{\rho}(t_A) + \left(t - \frac{|\vec{r}_B(t)|}{c} - t_A\right)\vec{v}_g + \vec{\epsilon}\left(t - \frac{|\vec{r}_B(t)|}{c}\right) \quad . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dane obserwacyjne, do których dopasowywać będziemy model, są zebrane na określony przedział czasu. Ustalmy teraz wybrany moment czasu, na przykład związany z początkiem przedziału danych i oznaczmy go jako t_0 . Można wreszcie ustalić wartość t_A :

$$t_A = t_0 - \frac{|\vec{r}_B(t_0)|}{c} \quad . \quad (4.5)$$

Podstawiając równanie (4.5) do równania (4.4) otrzymujemy:

$$\vec{r}_B(t) = \vec{\rho}\left(t_0 - \frac{|\vec{r}_B(t_0)|}{c}\right) + (t - t_0)\vec{v}_g - \frac{|\vec{r}_B(t)| - |\vec{r}_B(t_0)|}{c}\vec{v}_g + \vec{\epsilon}\left(t - \frac{|\vec{r}_B(t)|}{c}\right) \quad , \quad (4.6)$$

zaś ostatecznie, wprowadzając parametr

$$\vec{r}_0 = \vec{\rho}\left(t_0 - \frac{|\vec{r}_B(t_0)|}{c}\right) \quad ,$$

oraz funkcję

$$d(t) = \frac{1}{c} (|\vec{r}_B(t)| - |\vec{r}_B(t_0)|) \quad ,$$

a także skalując zależność $\vec{\epsilon}(t)$ w następujący sposób:

$$\vec{\epsilon}(t) = \vec{\epsilon}\left(t + \frac{|\vec{r}_B(t_0)|}{c}\right) \quad ,$$

otrzymujemy układ dwu sprzężonych równań funkcyjnych¹:

$$\begin{aligned}\vec{r}_B(t) &= \vec{r}_0 + (t - t_0)\vec{v}_g - d(t)\vec{v}_g + \vec{\epsilon}(t - d(t)) \quad , \\ d(t) &= \frac{1}{c} (|\vec{r}_B(t)| - |\vec{r}_B(t_0)|) \quad .\end{aligned}\tag{4.7}$$

Warto również zauważyć, że dla $t = t_0$ zachodzi:

$$\vec{r}_B(t_0) = \vec{r}_0 + \vec{\epsilon}(t) \quad .\tag{4.8}$$

Aby sprowadzić położenie gwiazdy do układu O , należy uwzględnić położenie obserwatora względem $\mathcal{BS}$. Względne przesunięcie tych dwóch układów będzie objawiać się nie tylko w postaci geometrycznej translacji położenia gwiazdy, lecz wpłynie także na różnicę czasu propagacji, a w związku z tym, obserwowane pozycje gwiazdy będą odpowiednio przesunięte w czasie. Związek położenia gwiazdy względem $\mathcal{BS}$ z położeniem względem O przedstawi się następująco:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_B(\tau) - \vec{x}(t) \quad , \\ \tau &= t + \frac{1}{c} (|\vec{r}_B(\tau)| - |\vec{r}(t)|) \quad .\end{aligned}\tag{4.9}$$

Podobnie jak poprzednio, układ ten można rozwiązać metodą iteracyjną, tym razem przyjmując początkowo $\tau = t$.

4.1.1 Prędkość radialna a prędkość tangencjalna

Na obserwowane położenie gwiazdy wpływają głównie składowe prędkości tzw. tangencjalne, czyli prostopadłe do kierunku łączącego obserwatora i gwiazdę. Prędkość radialna ujawnia się jedynie w postaci efektów wyższych rzędów, związanych np. z tzw. przyspieszeniem perspektywicznym. W związku z tym, niepewność jej wyznaczenia na podstawie obserwacji będzie znacznie większa niż w przypadku składowych tangencjalnych. Warto więc przedstawić prędkość $\vec{v}_g$ w obróconym układzie współrzędnych, związanym z przybliżonym kierunkiem do gwiazdy wyrażonym wektorem $\vec{r}_0$. Wprowadźmy oznaczenia:

$$\begin{aligned}\alpha_r &= \angle(\vec{e}_x, \vec{r}_0 - (\vec{r}_0 \cdot \vec{e}_z)\vec{e}_z) \quad , \\ \theta_r &= \angle(\vec{e}_z, \vec{r}_0) \quad .\end{aligned}\tag{4.10}$$

Jedna z możliwych transformacji pomiędzy prędkością w układzie standardowym ($\vec{v}_g$) a prędkością w układzie, w którym oś z skierowana jest zgodnie z wektorem $\vec{r}_0$ ($\vec{v}_s$),

¹podana postać układu równań jest o tyle przystępna, że dla zadanej wartości t można go rozwiązać metodą iteracyjną, przyjmując początkowo $d(t) = 0$

przedstawia się następująco:

$$\vec{v}_s = \mathbf{R}_z(\alpha_r) \cdot \mathbf{R}_y(\theta_r) \cdot \vec{v}_g \quad . \quad (4.11)$$

Nietrudno przedstawić transformację odwrotną:

$$\vec{v}_g = \mathbf{R}_y(-\theta_r) \cdot \mathbf{R}_z(-\alpha_r) \cdot \vec{v}_s \quad . \quad (4.12)$$

W nowym układzie współrzędnych prędkość radialna będzie skierowana z dobrym przybliżeniem w kierunku osi z . Zatem, trzecią składową wektora $\vec{v}_s$ można potraktować odmiennie od pozostałych. Jeśli znana jest (z innych obserwacji) przybliżona wartość prędkości radialnej gwiazdy, można tą wartość przyjąć za stałą i tym samym wykluczyć z modelu. Zmniejsza to ryzyko uzyskania złego dopasowania z mało prawdopodobną wartością prędkości radialnej. Użycie prędkości właśnie w takim układzie pozwala także na utrzymanie dobrej dokładności dopasowania pozostałych składowych.

4.2 Modelowanie danych na podstawie parametrów

Podsumujmy teraz wszystkie parametry uwzględniane w modelu. Są to przede wszystkim, dla każdej hipotetycznej planety, zestaw jej parametrów orbitalnych:

- półoś wielka orbity „gwiazdowej” ($\hat{a}$)
- mimośród orbity (e)
- nachylenie orbity (i)
- długość węzła wstępującego (Ω)
- długość perycentrum (ω)
- czas przejścia przez perycentrum (t_p)
- okres orbitalny (T)

Niezależnie od zakładanej ilości planet, w skład modelu wchodzi również następujące parametry:

- położenie barycentrum układu gwiazdy w ustalonej (t_0) chwili czasu ($\vec{r}_0$)
- prędkość barycentrum układu gwiazdy — jw. ($\vec{v}_s$)

Warto zauważyć, że każdy parametr wektorowy jest równoważny trzem niezależnym parametrom skalarnym. Jeśli przez N oznaczmy zakładaną ilość planet w układzie, otrzymamy $7N + 6$ niezależnych parametrów². Sama ilość planet nie jest parametrem układu z dwóch powodów. Po pierwsze, byłby to parametr o rozkładzie dyskretnym, a nie ciągłym, co wymagałoby odmiennego traktowania niż w przypadku pozostałych parametrów. Po drugie, jasne jest, że model z większą ilością planet będzie zawsze dopasowany do obserwacji lepiej niż model, w którym zakłada się ich mniejszą ilość. Porównywanie dwóch dopasowań o różnej ilości planet wymagałoby zatem bardziej wyrafinowanych metod niż standardowa metoda najmniejszych kwadratów.

Modelowanie położenia gwiazdy dla znanych wartości parametrów i ustalonej chwili czasu t rozpoczyna się od rozwiązania równania (2.2), po czym, obliczywszy wartość $E(t)$, wyznaczenia wektora przemieszczenia $\vec{\epsilon}$ z równania (2.4). Następnie, należy podstawić tę wartość, razem z wektorem $\vec{v}_g$ otrzymanym z (4.12), do układu równań (4.7). Otrzymany wektor $\vec{r}_B$ posłuży do rozwiązania układu (4.9), z którego wyznaczyć należy ostateczny wektor $\vec{r}$ astrometrycznego położenia gwiazdy. Wektor ten, po normalizacji ($\vec{S} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$), jest równoważny wektorom kierunkowym powstałym na skutek redukcji astrometrycznej danych obserwacyjnych.

4.3 Dopasowanie modelu do obserwacji

Na obecnym etapie analizy danych dysponujemy już serią danych obserwacyjnych po przeprowadzeniu redukcji astrometrycznej. Załóżmy, że seria ta składa się ze zbioru M trójek $\{(t_i, \vec{S}_i, \Delta_i)\}_{i=1\dots M}$ złożonych ze współrzędnej czasowej i odpowiadającego jej wektora kierunkowego oznaczającego położenie gwiazdy wraz z niepewnością (o zakładanym rozkładzie normalnym). Zakładając określone wartości parametrów modelu (opisanych w rozdziale 4.2) możemy skonstruować na ich podstawie serię wektorów kierunkowych $\{\vec{S}_i\}_{i=1\dots M}$ odpowiadających tym samym współrzędnym czasowym t_i .

Dla wybranych parametrów modelu możemy wyznaczyć wartość χ^2 , będącą miarą rozbieżności dwóch serii danych: obserwacyjnej i syntetycznej. Można więc skonstruować funkcję przyporządkowującą zestawowi parametrów miarę jego zgodności (a raczej rozbieżności) z obserwacjami:

$$\chi^2(\dots) = \sum_{i=1}^M \left(\frac{\vec{S}_i - \vec{S}_i(\dots)}{\Delta_i} \right)^2. \quad (4.13)$$

Należy zauważyć, że skoro wszystkie parametry modelu mają rozkład ciągły, to problem znalezienia parametrów najlepiej pasujących do obserwacji jest równoważny pro-

²lub $7N + 5$, zależnie od sposobu traktowania prędkości radialnej

blemowi znalezienia minimum funkcji wielu zmiennych, a mianowicie funkcji $\chi^2(\dots)$. Do rozwiązania tak sformułowanego problemu może zostać wykorzystany dowolny algorytm realizujący to zadanie, np. nadmieniony w [19] jako odpowiedni do tego celu algorytm Levenberga-Marquadta. Pomimo tego, że formalnie problem ograniczyć można do poszukiwania minimum globalnego, a odpowiadające mu parametry uznać za najlepsze dopasowanie, w praktyce dużą wartość mają także rozwiązania odpowiadające kolejnym co do zgodności minimom lokalnym (np. [4]). Po wyznaczeniu optymalnego zestawu parametrów, można, jeśli znana jest masa gwiazdy centralnej M_* , powrócić do równań (2.6) oraz (2.7) i wyznaczyć pólacie orbit a_i oraz masy wszystkich składników układu m_i ($i = 1 \dots N$).

Jednym z alternatywnych podejść, które mogą być wykorzystane w miejscu przedstawionego w tym rozdziale modelowania jest analiza widmowa (przy użyciu transformaty Fouriera) zmienności serii wektorów $\vec{s}_i$. Podejście takie opisane zostało w pracy [8].

Rozdział 5

Podsumowanie

Niniejsza praca stanowi próbę rozeznania zarówno możliwości, jak i wymagań stojących przed precyzyjną astrometrią. Dokonano przeglądu efektów, które muszą być wzięte pod uwagę już podczas oceny dokładności planowanych pomiarów, a także później, w czasie analizy zebranych danych pomiarowych. Udało się spojrzeć na problem pod kątem projektowania automatycznego systemu modelowania i redukcji danych — po raz kolejny okazało się, że zagadnienia precyzyjnej astrometrii bardzo dobrze nadają się do sformułowania w postaci schematu algorytmów, wykonywanych krok po kroku; także dlatego, że wiele dokładnych zależności nie da się przedstawić inaczej, jak tylko w postaci wyrażeń rozwiązywalnych numerycznie.

Tematyka precyzyjnych obserwacji astrometrycznych obejmuje bardzo wiele aspektów, dlatego nie zostały tu poruszone kwestie techniczne, dotyczące np. współpracy z efemerydą JPL czy szczegółów metod numerycznych. Tworzenie rzeczywistego systemu obliczeniowego jest zagadnieniem o wiele szerszym i obejmuje także kwestie architektury komputera, precyzji sprzętowej, kompilacji czy zastosowania metod numerycznych. Jest to zatem temat, który mógłby zostać poruszony w większym projekcie, skupionym wokół budowy działającego pakietu, przy pomocy którego możliwa byłaby numeryczna weryfikacja precyzji zawartego tu modelu, a nawet analiza rzeczywistych obserwacji interferometrycznych.

Bibliografia

- [1] G. C. Bower, i in. Radio Astrometric Detection and Characterization of Extra-Solar Planets: A White Paper Submitted to the NSF ExoPlanet Task Force. *ArXiv e-prints*, Kwiecień 2007.
- [2] A. Fienga, i in. INPOP08, a 4-D planetary ephemeris: From asteroid and time-scale computations to ESA Mars Express and Venus Express contributions. *ArXiv e-prints*, Czerwiec 2009.
- [3] K. Goździewski. korespondencja. 2009.
- [4] K. Goździewski, i in. Stability constraints in modeling of multi-planet extrasolar systems. Y.-S. Sun, S. Ferraz-Mello, & J.-L. Zhou, redaktor, *IAU Symposium*, wolumen 249 serii *IAU Symposium*, strony 447–460, Maj 2008.
- [5] R. M. Green. *Spherical astronomy*. Cambridge University Press, 1985.
- [6] J. C. Guirado, i in. Astrometric Detection of a Low-Mass Companion Orbiting the Star AB Doradus. *Astrophysical Journal*, 490:835, Grudzień 1997.
- [7] S. A. Klioner. A Practical Relativistic Model for Microarcsecond Astrometry in Space. *Astronomical Journal*, 125:1580–1597, Marzec 2003.
- [8] M. Konacki, i in. Frequency Decomposition of Astrometric Signature of Planetary Systems. *Astrophysical Journal*, 567:566–578, Marzec 2002.
- [9] J. Kryński, redaktor. *Rocznik Astronomiczny na rok 2009*. Instytut Geodezji i Kartografii, 2008.
- [10] C. D. Murray, S. F. Dermott. *Solar system dynamics*. Cambridge University Press, 1999.
- [11] M. A. C. Perryman. Overview of the Gaia Mission. P. K. Seidelmann and A. K. B. Monet, redaktor, *Astrometry in the Age of the Next Generation of Large Telesco-*

- pes*, wolumen 338 serii *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, strona 3, Październik 2005.
- [12] M. A. C. Perryman, i in. The HIPPARCOS Catalogue. *Astronomy and Astrophysics*, 323:L49–L52, Lipiec 1997.
 - [13] S. H. Pravdo, S. B. Shaklan. An ultracool Star’s Candidate Planet. *Astrophysical Journal*, 700:623–632, Lipiec 2009.
 - [14] M. Shao, i in. An Overview of the Space Interferometry Mission, SIM. *Bulletin of the American Astronomical Society*, wolumen 27 serii *Bulletin of the American Astronomical Society*, strona 1384, Grudzień 1995.
 - [15] J. Souchay, i in. The ICRS: concept, realization, accessibility and maintenance. M. Soffel, N. Capitaine, redaktorzy, *Journées 1999 - systèmes de référence spatio-temporels & IX. Lohrmann-Kolloquium. Motion of celestial bodies, astrometry and astronomical reference frames, Dresden, 13-15 September 1999*, strony 3–7. Lohrmann-Observatorium, Technische Universität Dresden; Observatoire de Paris, Département d’Astronomie Fondamentale, 2000.
 - [16] A. Sozzetti. Detection and Characterization of Planetary Systems with μ as Astrometry. *ArXiv e-prints*, Luty 2009.
 - [17] E. M. Standish. Time scales in the JPL and CfA ephemerides. *Astronomy and Astrophysics*, 336:381–384, Sierpień 1998.
 - [18] M. Tuomi, i in. The complementarity of astrometric and radial velocity exoplanet observations. Determining exoplanet mass with astrometric snapshots. *Astronomy and Astrophysics*, 494:769–774, Luty 2009.
 - [19] J. T. Wright, A. W. Howard. Efficient Fitting of Multiplanet Keplerian Models to Radial Velocity and Astrometry Data. *Astrophysical Journal Supplement Series*, 182:205–215, Maj 2009.