

1 Wprowadzenie

Tematem mojego krótkiego seminarium jest ukazanie różnic pomiędzy, dobrze przez nas poznaną, geometrią euklidesową a geometrią symplektyczną. Jako że w toku naszej edukacji mieliśmy tylko podstawy algebry liniowej i matematyki bez zaawansowanego jej współczesnego oblicza temat ten przedstawię w formie ogólnego opisu i zaznaczenia głównych różnic niż właściwych podstaw geometrii.

2 Macierz jednostkowa

Jak wiemy z równolegle prowadzonych zajęć dynamiki nieliniowej do opisu różnych układów fizycznych ewoluujących w czasie wygodne jest stosowanie tzw. *przestrzeni fazowej*. Krótko przypominając jest to sposób opisu układu gdzie każdy wymiar przestrzenny ma swój odpowiedni wymiar pędowy i razem tworzą parę. Tak więc przestrzeń fazowa ma zawsze liczbę wymiarów będącą wielokrotnością dwójki przez fakt parowania wymiarów rzeczywistych i pędowych.

Do przestrzeni fazowej (dla jednego wymiaru przestrzennego i jednego fazowego) dochodzimy korzystając z równań Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

Zapisując inaczej powyższe równania:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix}$$

Środkowa macierz jednostkowa w powyższym równaniu jest nazywana macierzą symplektyczną. Zaś geometrię, w której jest ona macierzą jednostkową nazywamy, a jakże, symplektyczną. Cała przestrzeń fazowa i zjawiska na niej zachodzące podlegają więc zasadom działania geometrii symplektycznej. Widzimy więc że nie jest to abstrakcyjny wymysł szalonych matematyków, a czysto praktyczna część fizyki.

Pierwszą różnicę pomiędzy geometrią euklidesową a symplektyczną widać już na pierwszy rzut oka.

$$\text{Euklidesowa } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Symplektyczna } J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Można powiedzieć że to jedyna różnica, gdyż cała reszta tak właściwie wynika z tej podstawowej własności. Gdyż:

$$\text{Euklidesowa } MIM = I \quad \text{Symplektyczna } M^T J M = J$$

, dalej:

$$\text{Euklidesowa } I^{-1} = I \quad \text{Symplektyczna } J^{-1} = J^T = -J$$

. Lecz są także podobieństwa, gdy pomnożymy dowolne dwie macierze symplektyczne to otrzymamy również macierz symplektyczną, przez co tworzą całą grupę macierzy symplektycznych będących grupą nieabelową (nieprzemianną), analogicznie jak w geometrii Euklidesa:

$$S_1, S_2 \in S_{p_{2s}}(R) \quad S_3 = S_1 \cdot S_2 \Rightarrow S_3^T \cdot J S_3 = J$$

Podobnie macierz jednostkowa jest elementem jednostkowym:

$$1 \cdot J 1 = J$$

I tak samo macierze symplektyczne zawsze można odwrócić:

$$(\det S)^2 = 1 \neq 0$$

Chciało by się rzec że geometria symplektyczna jest *taka sama tylko inna* niż geometria euklidesowa.

3 Iloczyn skalarny a forma antysymetryczna

Kolejną różnicą, oczywiście wynikającą z zupełnie odmiennej macierzy jednostkowej, jest inna postać formy dwuliniowej. O ile w geometrii Euklidesa naszą formą dwuliniową był iloczyn skalarny, opisany wzorem:

$$\vec{x}, \vec{y} \in R^n \quad [\vec{x}^T \vec{y}] = (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

Możemy na zasadzie analogii stworzyć podobną formę dwuliniową dla naszej geometrii symplektycznej:

$$\vec{x}, \vec{y} \in R^{2s} \quad [\vec{x}^T \vec{y}] = (x_1, \dots, x_{2s}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2s} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{2s} x_i \cdot J_{ik} \cdot y_i$$

, inaczej, gdzie każda para to współrzędna przestrzenna i pędowa:

$$[x, y] = \omega = x_1 \wedge x_2 + x_3 \wedge x_4 + \dots + x_{2s-1} \wedge x_{2s}$$

Obie formy są niezmiennicze względem swoich przekształceń (macierzy symplektycznych $S_{p_{2s}}(R)$):

$$[S \cdot x, S \cdot y] = x^T S^T J S y = x^T J y = [x, y]$$

Porównajmy właściwości przemienności obydwu form:

$$\text{Euklidesowa } [\vec{x}, \vec{y}] = [\vec{y}, \vec{x}] \quad \text{Symplektyczna } [\vec{x}, \vec{y}] = -[\vec{y}, \vec{x}]$$

, i okazuje się forma symplektyczna jest antysymetryczna. Implikuje to parę problemów np. opis ortogonalności:

$$\text{Euklides } x \perp y \Leftrightarrow [x, y] = 0 \quad \text{Symplektyczna } x \perp y \Leftrightarrow [x, y] = 1 \wedge [y, x] = -1$$

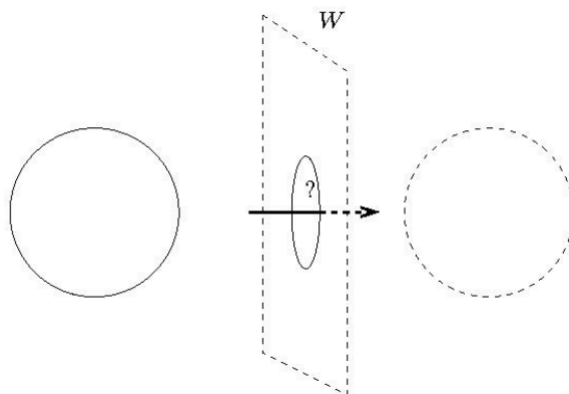
, chciałby się zapytać co tu robi jedynka? Ale to nie pomyłka, ortogonalność w przestrzeni symplektycznej (co jak pamiętamy jest przestrzenią fazową, pędowo-przestrzenną) jest zupełnie inaczej definiowana, wymusza to właśnie fakt antysymetryczności.

4 Kształt kontra objętość

Inne pojęcie ortogonalności jest nie jedynym zaskakującym wnioskiem z prostej zmiany macierzy jednostkowej. Omówię tutaj dość pobieżnie trzy twierdzenia nie mające swoich odpowiedników w innych geometriach, z którymi mieliśmy dotychczas do czynienia.

Pierwszym ważnym twierdzeniem jest twierdzenie **Darboux** mówiące że lokalnie wszystkie formy symplektyczne są nierozróżnialne. Mówiąc inaczej okazuje się że nie możemy poznać struktur w przestrzeni symplektycznej biorąc pod uwagę jej kształt, gdyż zawsze dla danej struktury symplektycznej będzie istniało nieskończenie wiele kształtów równie dobrze spełniających wymagania. A to jest już coś bardzo dziwnego. Wynika z tego jeszcze inne twierdzenie **stabilności Moser'a**, mówiące że nie można w żaden sposób stworzyć nowych struktur przez deformacje starych, skoro kształt nie ma znaczenia wydaje się być to nawet logiczne.

Rysunek 1: Problem wielbłąda symplektycznego



Aby zobrazować nasze abstrakcyjne rozważania, rozważmy problem wielbłąda. Nazwa pochodzi od powiedzenia *prędzej wielbłąd przejdzie przez ucho igielne niż, bogaty trafi do nieba*. Dajmy sobie w naszej 4-wymiarowej przestrzeni symplektycznej kulę o promieniu R oraz płaszczyznę z okrągłym otworem o wymiarze r . Aby było *symplektyczniej* założmy że $r < R$. Czy da się przepchać naszą kulę przez otwór w płaszczyźnie? Ku naszemu zdroworozsądkowemu myśleniu powiemy nie, lecz nie zapominajmy o twierdzeniu Darboux oraz Moser'a. Skoro z jednej strony kształt naszej symplektycznej struktury nie ma znaczenia, zaś deformacja nie tworzy nam nowych struktur, to przecież możemy zgnieść naszą kulę w długi owal i przepchać przez dziurę! Powiecie że to są tylko geometryczne sztuczki niemożliwe w naszym rzeczywistym świecie, lecz jeszcze raz wam przypomnę że w fizyce relatywistycznej jak rozpędzimy naszą kulę do prędkości bliskich prędkości światła to skraca ona swoją długość i tak lecąc z dużą prędkością może wpaść w *mniejszą* dziurę.

Drugim ważnym twierdzeniem jest twierdzenie Liouville'a. O ile poprzednie twierdzenia opisują co układowi wolno to tym razem powiemy co układ musi. Mówi ono że wraz z ewolucją czasową struktury, zachowuje ono zawsze objętość oraz orientację swego obszaru początkowego. Można w takim razie wyobrazić sobie ruch w geometrii symplektycznej jako tak właściwie przepływ strumienia cieczy nieściśliwej. Ciecz owa nie ma konkretnego kształtu, zaś w jej środku punkty nie poruszają się po jakiś konkretnych trajektoriach.

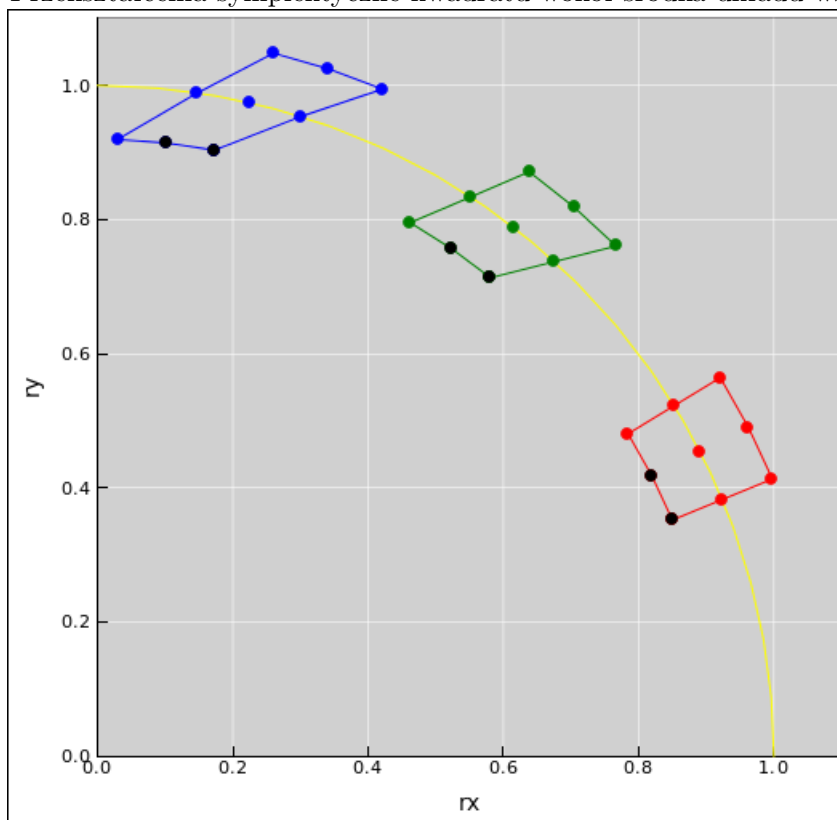
5 Fizyka wszyta w geometrię

Wydawać by się mogło że geometria o tak dziwnych założeniach i tak dziwnych wnioskach jest zupełnie człowiekowi nie potrzebna. Że poziom abstrakcji, nie intuicyjności i oderwania od obrazu naszego świata, który nas otacza jest zbyt wielki aby do czegoś owa geometria mogła się przydać. Jednak jest to całkowicie błędne stwierdzenie.

Jak powiedzieliśmy w poprzednim rozdziale przekształcenia symplektyczne nie zachowują kształtu tylko objętość. Zadajmy sobie więc kwadrat, który będziemy obracać wokół środka układu współrzędnych. Skutek tych operacji będzie wyglądał tak jak na rysunku 2. Zachowanie co najmniej dziwne i nie naturalne dla ludzi przyzwyczajonych do geometrii euklidesowej. Ale gdy przyjrzymy się bliżej temu układowi to zauważymy pewne uderzające prawdopodobieństwo. Narysujmy sobie kropki na bokach kwadratów i nazwijmy je asteroidami, zaś w środku ustawmy słońce. Eureka! Od razu wyrwa się z ust, przecież to jest zwykły i pospolity ruch cząstek w polu grawitacyjnym!

Bez odwoływania się do praw Newtona i Keplera tylko na podstawie właściwości geometrii symplektycznej jesteśmy w stanie przeprowadzać ewolucje czasową takich układów. Co więcej naruszenie zasad geometrii symplektycznej w prost równało by się naruszeniu praw fizycznych przez układ. Można więc powiedzieć że prawa fizyki są jakby *wszyte* w właściwości tej geometrii. Jakież to zupełnie inne podejście od geometrii euklidesowej gdzie owe więzy praw fizycznych musieliśmy wprowadzać do układu przez różne wzory wyznaczające granice. Wynika z tego ważny wniosek, mianowicie wydaje się że geometria symplektyczna jest bardziej naturalnym językiem fizyki od euklidesowej geometrii. I

Rysunek 2: Przekształcenia symplektyczne kwadratu wokół środka układu współrzędnych.



co gorsza dla świata geometria Euklidesa jest bardziej *abstrakcyjna*.

6 Bibliografia

Pisząc tą pracę skorzystałem z następujących materiałów:

- *WHAT IS SYMPLECTIC GEOMETRY?* DUSA MCDUFF
<http://www.math.sunysb.edu/~dusa/ewmcambrevjn23.pdf>
- *Od mechaniki klasycznej Do mechaniki kwantowej* Stanisław Kaprzyk
<http://fatcat.ftj.agh.edu.pl/~kaprzyk/Mechanika/mechanika/node60.html>
- *Liouville's Theorem* John Denker
<http://www.av8n.com/physics/liouville-intro.htm>
- *Mathematical Methods of Classical Mechanics* V.I. Arnold